



# ¿Qué es... Conjunto y Geometría Fractal?

Dr. Adrián Esparza Amador

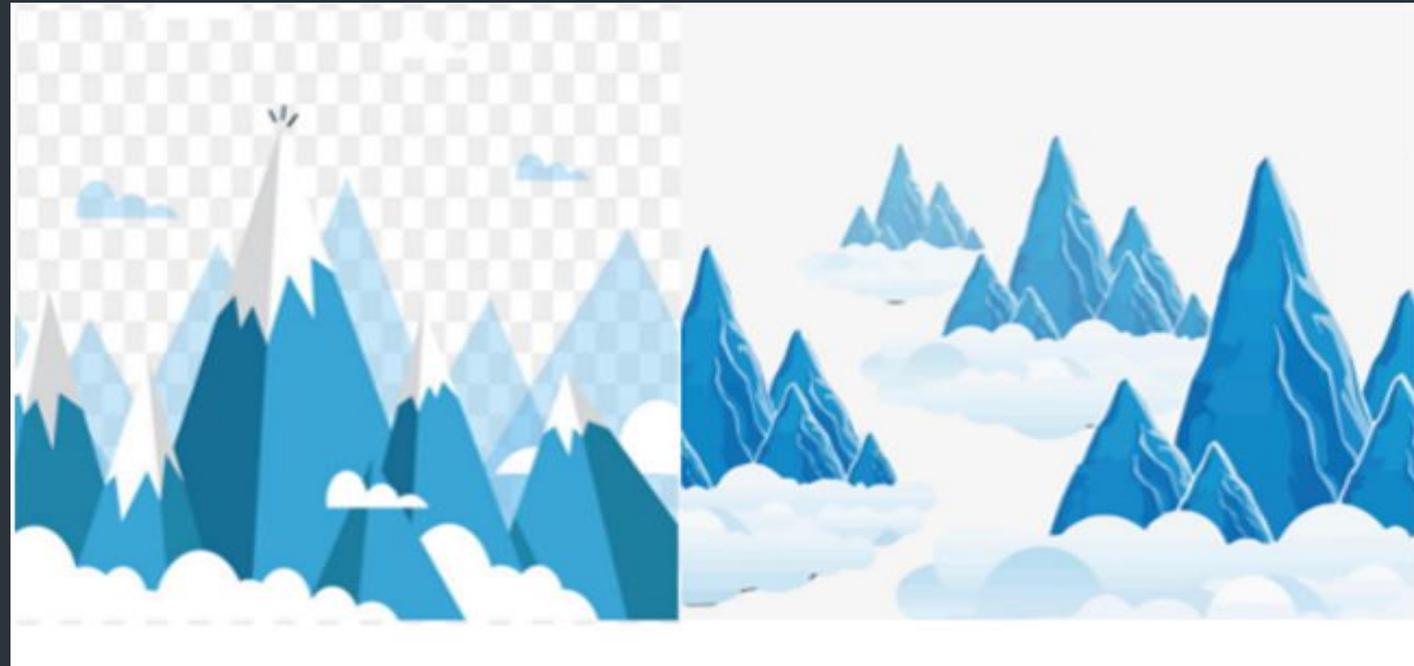
Centro de Investigación A.C.

Miércoles 26 de Septiembre de 2018



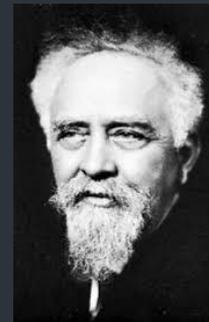
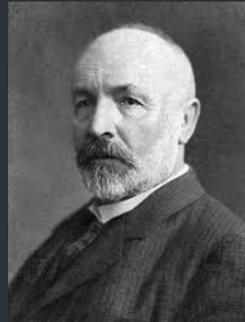
*"Nuestro mundo está constituido por montañas, costas, mares, nubes, plantas, animales, etc; sin duda alguna es el reino de la forma. Si quisiéramos describirlo, un vistazo rápido podría desalentar todo intento de realizar simplificaciones: más que el reflejo de la perfecta armonía de un mundo sencillo y ordenado, parece ser el dominio de la irregularidad y el caos." V. Talanquer*

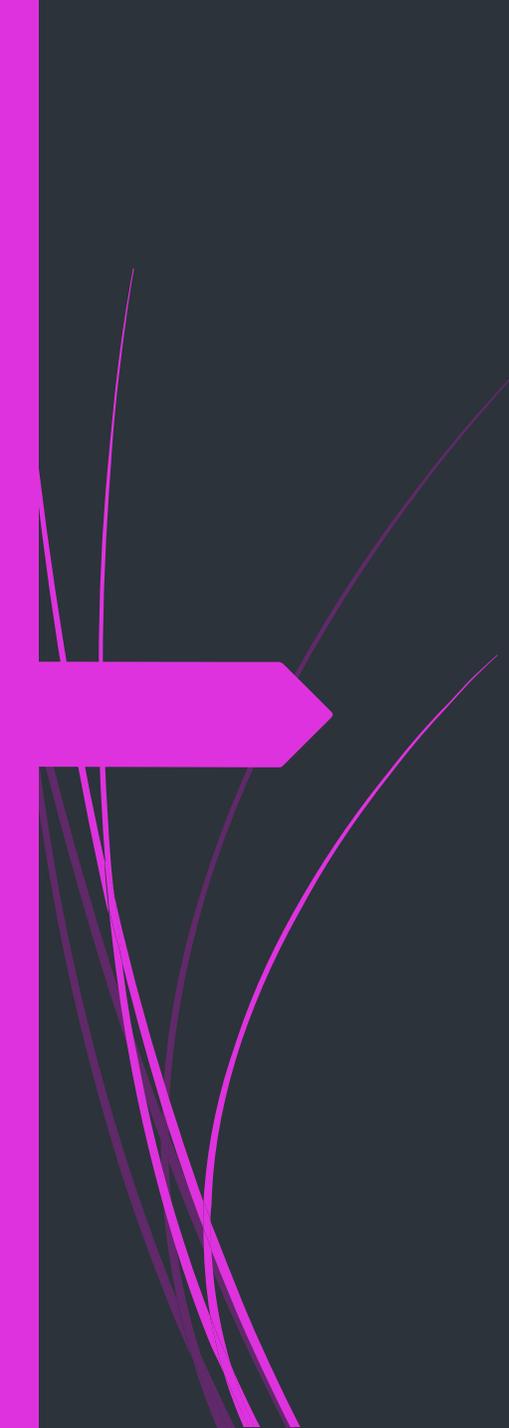
*“La geometría es a veces descrita como `fría' y `seca', por su inestabilidad para describir la forma de una nube, una montaña, una costa, o un árbol. Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, ni un rayo viaja en una línea recta.” B. Mandelbrot*



# Historia breve:

- ▶ (1975) **B.B. Mandelbrot** escribe su ensayo "*Les objets fractals: forme, hasard et dimension*". Introduciendo por primera vez la palabra '*fractal*'.
- ▶ (1875) **dB. Reymond** reporta por primera vez una función continua no-diferenciable construida por **K. Weierstrass**
- ▶ (1883) **G. Cantor** da a conocer el *conjunto de Cantor*, descubierto por **H.J. Stephen Smith** en 1874.
- ▶ (1902) **H. Lebesgue** introduce la *medida de Lebesgue*.
- ▶ (1914) **F. Hausdorff** introduce la *dimensión de Hausdorff (fractal)*.
- ▶ (1926) **J. Perrin** recibe el premio Nobel por su trabajo en "*estructura discontinua de la materia*", (*Movimiento Browniano*).



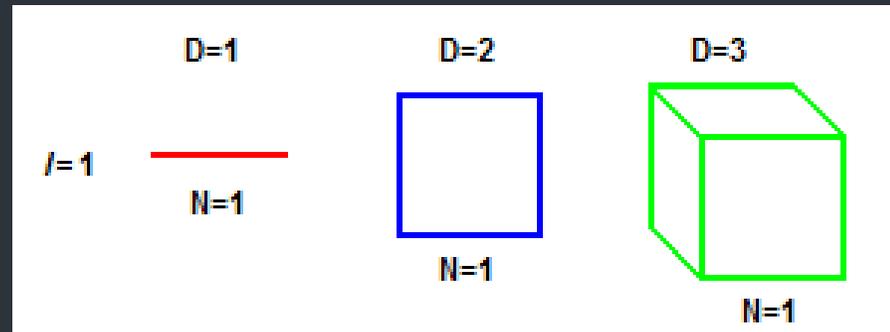


# Dimensiones

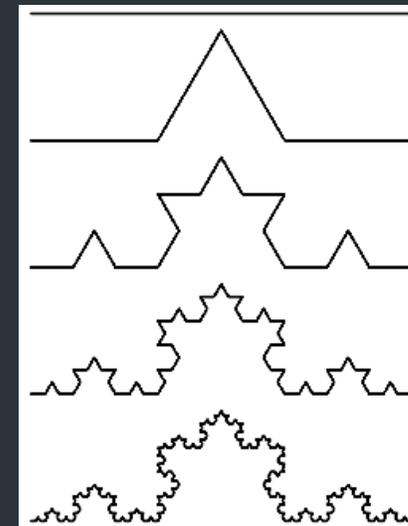
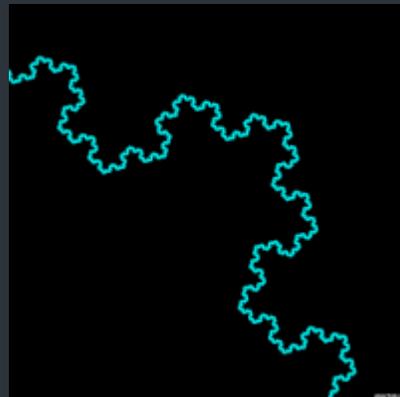
¿Dimensión no entera?

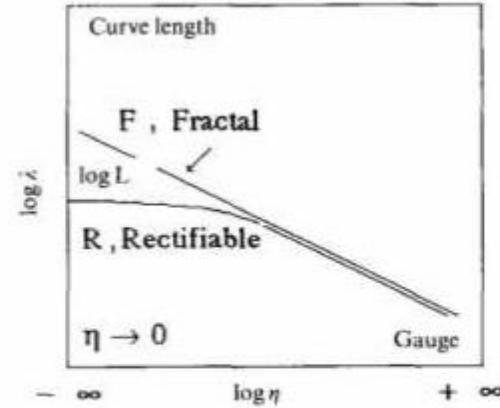
# Medidas

- La geometría clásica (Euclídeana) nos dicta que los objetos 'regulares' tienen dimensión entera.



- ¿Qué es un objeto 'no regular'?





**Figure 1.2** Characteristics of rectifiable (R) and fractal (F) curves. For R the length  $\lambda(\eta)$  measured in steps of length  $\eta$  approaches a finite limit L as  $\eta \rightarrow 0$ , for F there is no limit. The concept of non-integral dimension is related to the slope of a fractal curve.

Aproximaciones:

- $\lambda(P) \sim (\eta(P))^{1-\Delta}$
- $N(P) \sim (\eta(P))^{-\Delta}$
- $N(P) \cdot (\eta(P))^\Delta = u_0^\Delta (= 1)$



Mandelbrot:

➤  $\Delta = -\frac{\log(N(\eta))}{\log(\eta)}$

# Dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

(Tecnisismo)

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto no vacío. El diámetro de  $U$  se define como:

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$$

Sea ahora  $I$  un conjunto arbitrario de índices. La colección  $\{U_i\}_{i \in I}$  se denomina un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$  si:

- ▶  $F \subset \cup U_i$
- ▶  $0 < |U_i| \leq \delta$ , para  $i \in I$ .

Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  y  $s$  un número no negativo. Para cualquier  $\delta > 0$  se define:

$$\text{▶ } \mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\{\sum |U_i|^s\}$$

La *medida exterior  $s$ -dimensional de Hausdorff* del conjunto  $F$  es

$$\text{▶ } \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\{\delta \rightarrow 0\}} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

# Dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

(Tecnisismo)

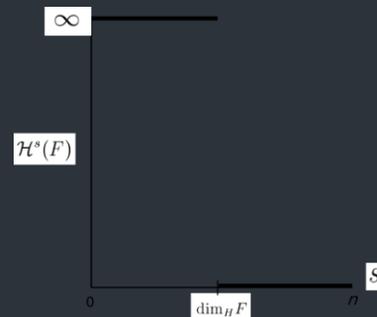
Para todo conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  existe  $s_0 \leq n$  con la propiedad:

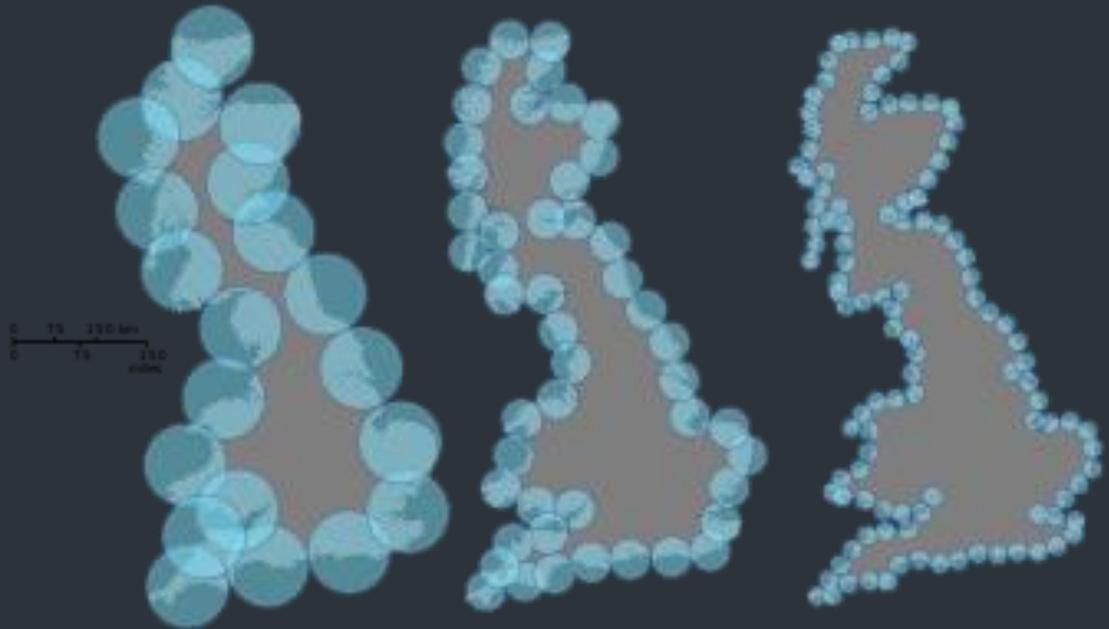
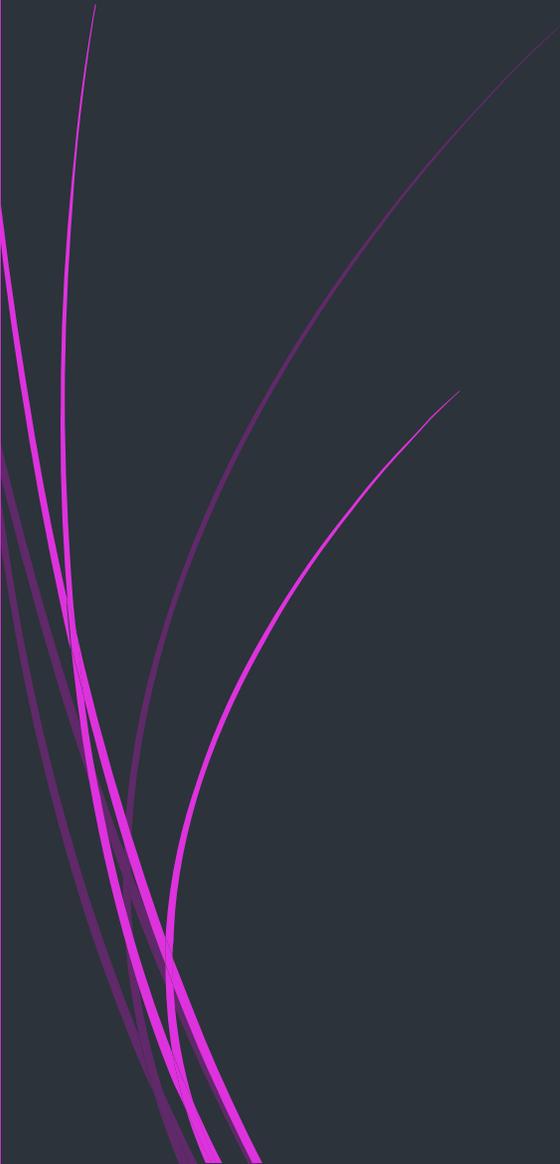
►  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$  para  $s < s_0$

►  $\mathcal{H}^s(F) = 0$  para  $s > s_0$ .

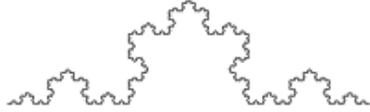
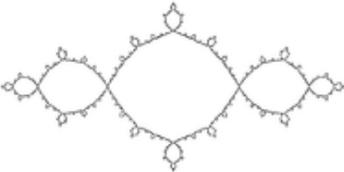
La *dimensión de Hausdorff(-Besicovitch)* se define como:

►  $\dim_{HB}(F) := \sup\{s: \mathcal{H}_\delta^s(F) = \infty\} := \inf\{s: \mathcal{H}_\delta^s(F) = 0\}.$

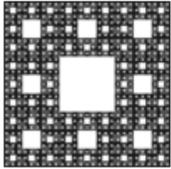
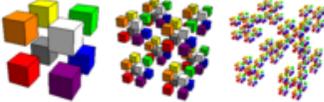
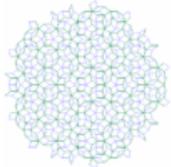
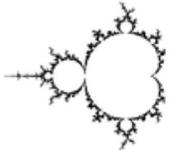




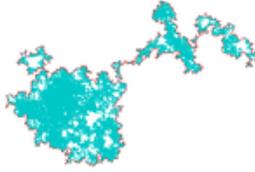
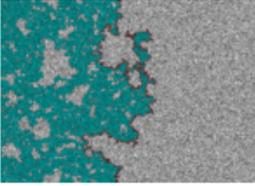
# Dimensiones Hausdorff-Besicovitch

$\frac{\log(4)}{\log(3)}$	1,2619	Curva de Koch		Al yuxtaponer tres curvas de Koch se obtiene el copo de nieve (o bien el anti-copo de nieve) de Koch.
$\frac{\log(4)}{\log(3)}$	1,2619	frontera de la curva del terdragón		Sistema L: análogo a la curva del dragón con ángulo = 30°. El <i>Fudgeflake</i> se construye a partir de la yuxtaposición de tres segmentos iniciales en forma de triángulo.
$\frac{\log(4)}{\log(3)}$	1,2619	Polvo de Cantor bidimensional		Conjunto de Cantor en 2D.
calculado	1,2683	Conjunto de Julia $z^2-1$		Conjunto de Julia para $c = -1$ . <sup>3</sup>

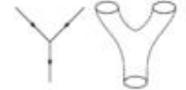
# Dimensiones Hausdorff-Besicovitch

$\frac{\log(8)}{\log(3)}$	1,8928	Alfombra de Sierpinski		Cada una de las caras de la esponja de Menger es una alfombra de Sierpinski, como lo es la superficie inferior de la superficie de Koch cuadrática tridimensional (tipo 1).
$\frac{\log(8)}{\log(3)}$	1,8928	Polvo de Cantor tridimensional		Conjunto de Cantor en tres dimensiones.
Estimado	1,9340	Frontera de la curva de Lévy		Estimado por Duvall y Keesling (1999). La propia curva tiene una dimensión fractal de 2.
	1,974	Teselación de Penrose		See Ramachandrarao, Sinha & Sanyal <sup>10</sup> .
2	2	Frontera del conjunto de Mandelbrot		La frontera y el propio conjunto tienen la misma dimensión <sup>11</sup> .

# Conjuntos aleatorios y naturales

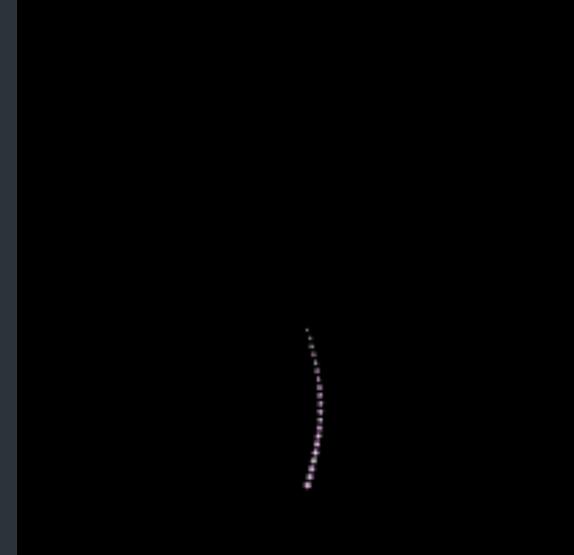
Medido	1,24	Línea de costa de Gran Bretaña		
$\frac{4}{3}$	1,33	Frontera del movimiento browniano		(Cf Lawler, Schramm, Werner). <sup>16</sup>
$\frac{4}{3}$	1,33	Polímero en 2D		Similar al movimiento browniano en 2D sin autointersecciones. (Cf Sapoval).
$\frac{4}{3}$	1,33	Frente de percolación o frente de corrosión en 2D		Dimensión fractal del frente de percolación por invasión en el umbral de percolación (59,3%). También es la dimensión fractal del frente de corrosión (Cf Sapoval).

# Conjuntos aleatorios y naturales

	2,50	Figura de Lichtenberg	 A photograph of a Lichtenberg figure, a branching fractal pattern created by electrical discharges in a resin block.	Su forma y crecimiento parecen estar relacionados con el proceso de agregación por difusión limitada (Cf Sapoval).
Medido	2,66	Brócoli	 A photograph of a head of fresh broccoli, showing its characteristic fractal branching structure.	18
	2,79	Superficie del cerebro humano	 A photograph of a human brain, highlighting the highly convoluted and fractal-like surface of the cerebral cortex.	19
	2,97	Superficie del pulmón	 A photograph of a pair of human lungs, showing the intricate, branching structure of the alveoli.	Los alveolos de un pulmón forman un fractal de superficie fractal próxima a 3 (Cf Sapoval).
Calculado	3	Cuerda cuántica	 Two schematic diagrams of quantum strings, showing branching and merging structures.	Dimensión de Hausdorff de una cuerda cuántica cuyo punto representativo vaga aleatoriamente. <sup>20</sup>

# Auto-Similitud

Repeticiones a Escala



# La Naturaleza



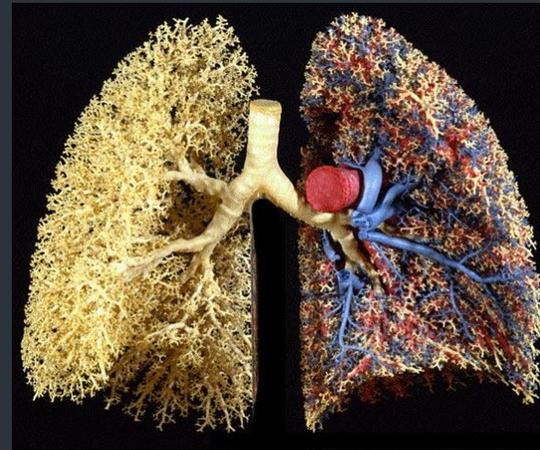
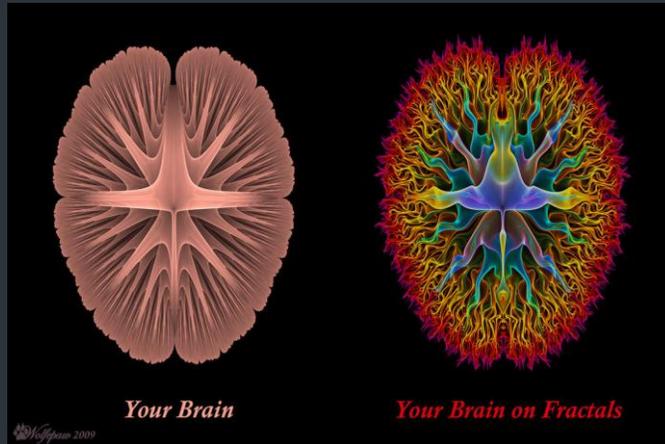
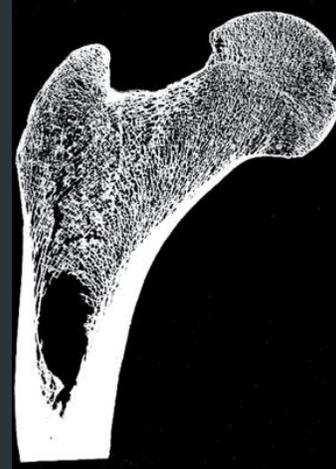


# “Nomen est numen”

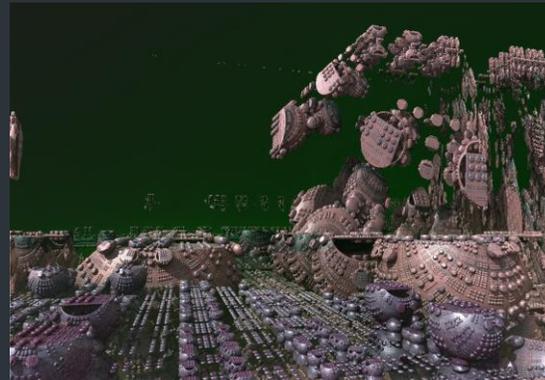
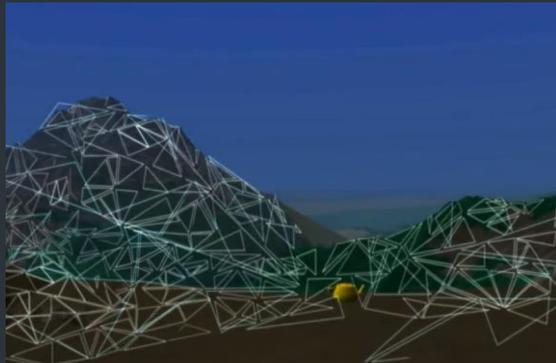
En 1975, Benoit Mandelbrot denominó **fractales** (del latín *fractus*-irregular) al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita (medida), por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccional.



# Nuestro cuerpo

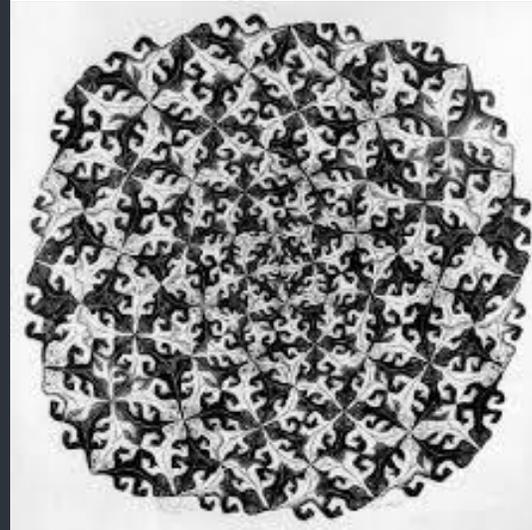


# Fractales en Hollywood

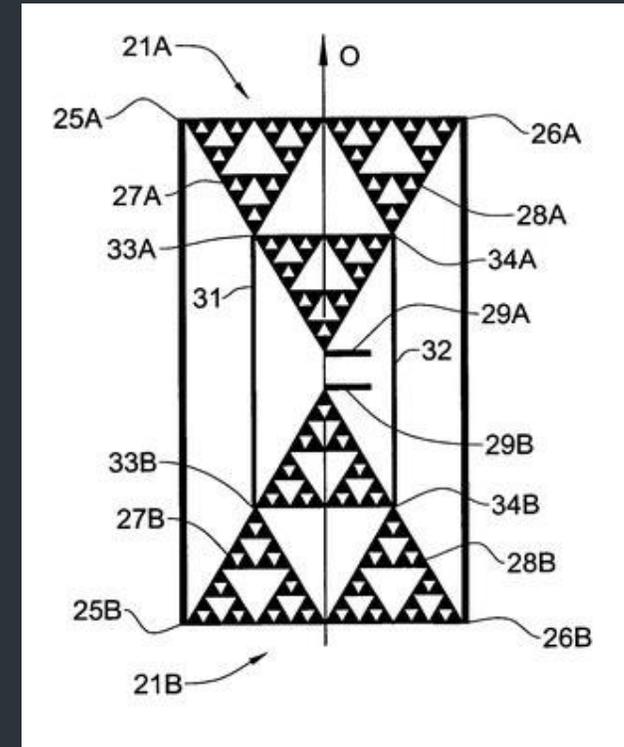
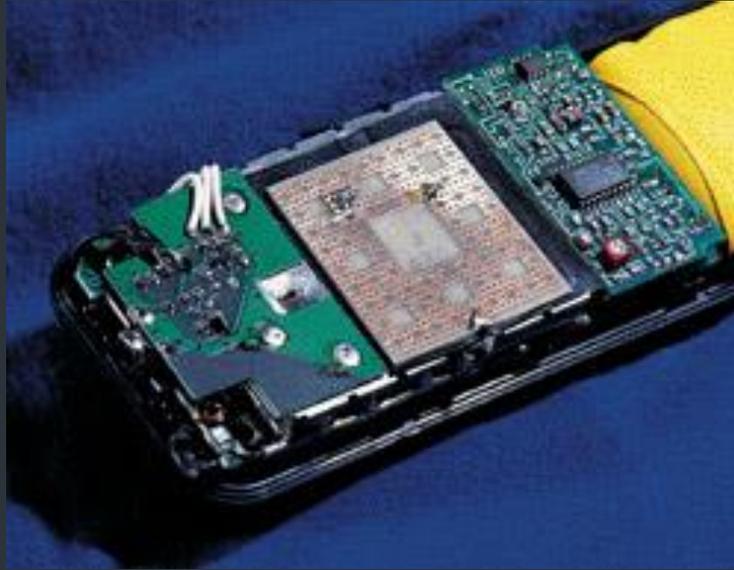


RICK MARTIN 12

# Fractales y el arte



# Tecnología.



# Telecomunicaciones.

# Química.



Crecimiento en copo de nieve de líquido metálico



# ¿Dónde hay fractales?:

- ▶ Astronomía.
- ▶ Geografía.
- ▶ Química.
- ▶ Física (Hidrodinámica, Termodinámica).
- ▶ Renderización de Imagen – Diseño.
- ▶ Arquitectura.
- ▶ Antropología.



# Dinámica holomorfa

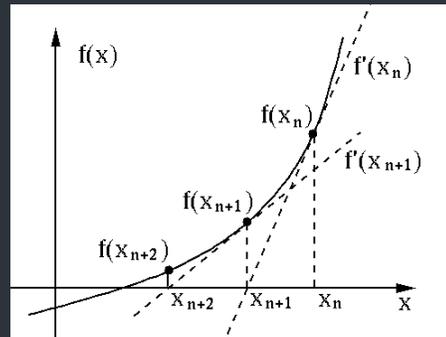
# Método de Newton



Dada una función  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , el sistema de Newton Asociado está dado por la función.

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

Los ceros de  $f$  son aproximados mediante la iteración.



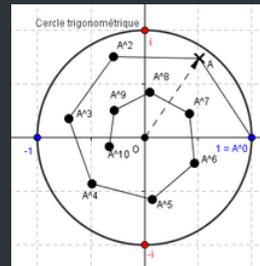
$$z_{n+1} = N_f(z_n) = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

# Dinámica de Iteración racional



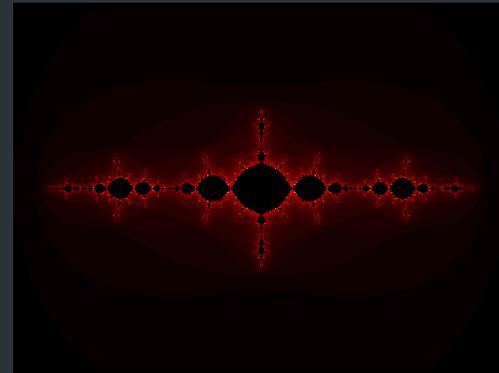
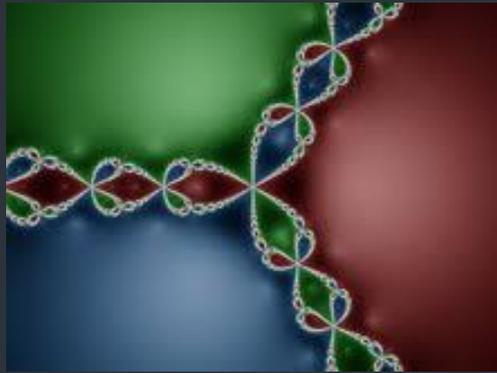
Dada una función racional  $R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , ¿Cómo es el comportamiento asintótico del proceso de iteración

$$z_{n+1} = R(z_n)$$



# Conjuntos de Fatou y Julia

Conjunto de Fatou: Conjunto de *estabilidad* de la iteración



Conjunto de Julia: Conjunto *Caótico* de la iteración

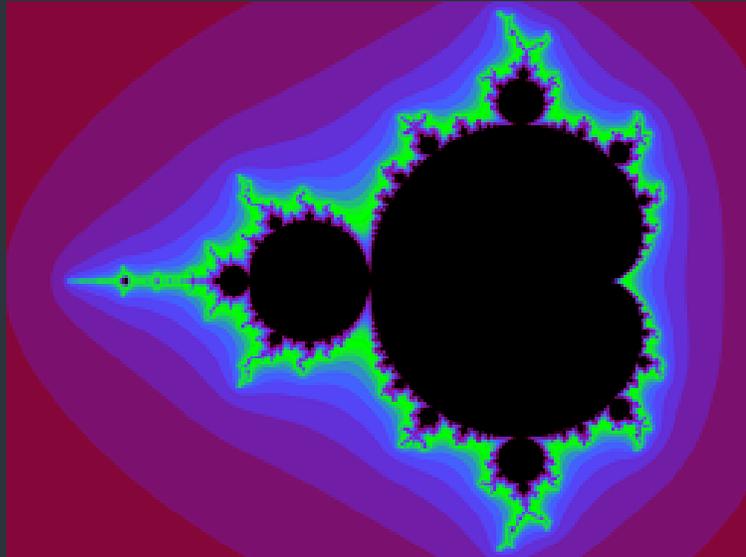
# Conjunto de Mandelbrot

Todo polinomio cuadrado

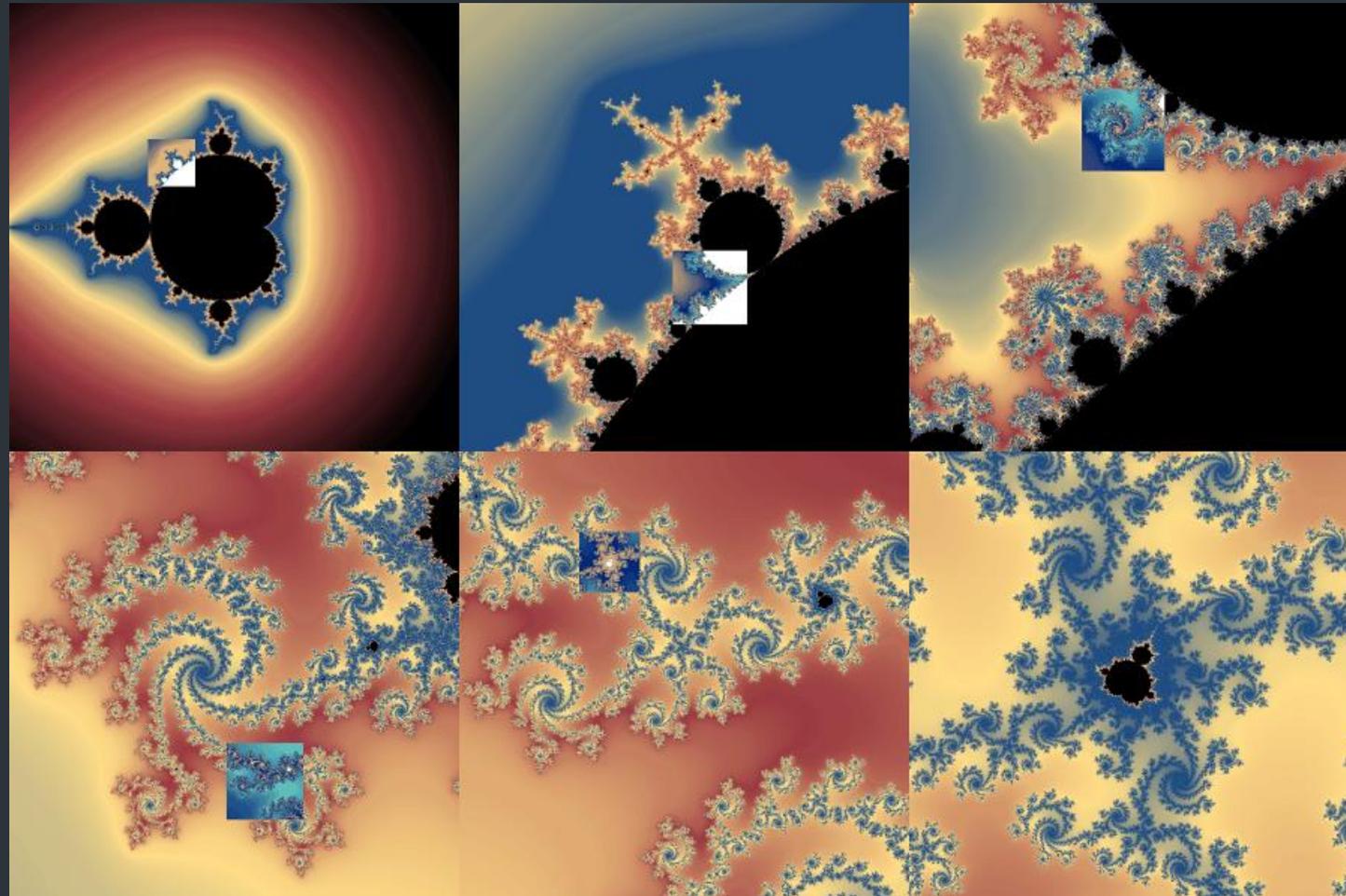
$$P_0(w) = a_0w^2 + b_0w + c_0$$

Es conformemente equivalente a un polinomio cuadrático

$$P(z) = z^2 + c, c \in \mathbb{C}$$



# Conjunto de Mandelbrot



# Trabajo presente

